ALGEBRAS DE JORDAN GENERALIZADAS *

Irvin Roy Hentzel
Department of Mathematics
Iowa State University
Ames, IA 50011-2064, U.S.A.
E-mail: hentzel@iastate.edu

Alicia Labra
Departamento de Matemáticas,
Fac. de Ciencias,Universidad de Chile,
Casilla 653, Santiago, Chile
E-mail: alimat@uchile.cl

En este trabajo se estudian álgebras conmutativas sobre un cuerpo F de característica distinta de $2, 3$. Las álgebras no son necesariamente asociativas ni de dimensión finita. El asociador (x, y, z) se define como $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$. Se estudian álgebras que satisfacen las tres identidades siguientes donde t, β, γ son escalares en F.

$$((xx)y)x + t((xx)x)y = 0 \tag{1}$$

$$((xx)x)(yx) - (((xx)x)y)x = 0 \tag{2}$$

$$\beta((xx)y)x + \gamma((xx)x)y - (\beta + \gamma)((yx)x)x = 0. \tag{3}$$

Cuando $t \neq -1$, la identidad(1) implica

$$((xx)x)x = 0. \tag{4}$$

Se prueba que con la excepción de unos pocos valores de los parámetros, la primera implica tanto la segunda como la tercera. La primera es equivalente a una combinación de $((xx)x)x = 0$ y de la tercera.

*Partially supported by FONDECYT 1030919.

Se dan también ejemplos que muestran que nuestros resultados son en un sentido razonable los mejores posibles. La identidad (2) se llama la *identidad 3-Jordan.* Se sabe, (ver Hentzel y Peresi[4]) que son álgebras de Jordan o de Pseudo Composición. El caso especial de la identidad (3) cuando $\beta = 1$ y $\gamma = 2$ se llama la *identidad casi-Jordan:*

$$3((xx)y)x = 2((yx)x)x + ((xx)x)y. \tag{5}$$

Esta identidad ha recibido una atención considerable (ver Osborn[4,5], Petersson[7], Hentzel and Peresi[3], Sidorov[8]). Se sabe que cualquier álgebra que satisface la identidad (5) es de Jordan sí y sólo sí es cuatro-potencia asociativa.

En un álgebra que satisface la identidad (5) el generado por los elementos de la forma (xx, x, x) forma un ideal trivial. Consecuentemente, cualquier álgebra semi-prima que satisface la identidad (5) es un álgebra de Jordan.

En el estudio de las identidades de grado cuatro no implicadas por la commutatividad, Osborn[5] clasificó aquellas que son compatibles con poseer un elemento unidad. Carini, Hentzel, y Piacentini-Cattaneo[1] extienden este trabajo quitando la restricción de la existencia del elemento unidad. La identidad (3) aparece como una de las identidades adicionales de grado cuatro. En un álgebra con unidad, la identidad (3) implica que $(\beta+3\gamma)(y, x, x) = 0$. Esta identidad de grado tres, además de la conmutatividad y la característica distinta de 3 implican la asociatividad cuando $\beta + 3\gamma$ no es cero.

En [2] Correa, Hentzel y Labra prueban que las identidades (3) y (4) juntas implican que el operador de multiplicación es nilpotente.

REFERENCIAS

[1] L.Carini, I.R.Hentzel, G.M.Piacentini-Cattaneo, Degree four identities not implied by commutativity, Comm. in Algebra 16,(2): 339-356 (1988).

[2] I. Correa, I. R. Hentzel, A. Labra, On the nilpotence of the multiplication operator in commutative right nil algebras, Comm. in Alg. 30 (7): 3473-3488 (2002).

[3] I. R. Hentzel and L. A. Peresi, Almost Jordan Rings, Proc. of A. M. S, 104 (2): 343-348 (1988).

[4] I. R. Hentzel and L. A. Peresi, A variety containing Jordan and pseudo-composition algebras. Submitted, 2003.

[5] J. M. Osborn, Identities of non-associative algebras, Canad. J. Math. 17: 78-92 (1965).

[6] J. M. Osborn, Commutative algebras satisfying an identity of degree four, Proc. Amer. Math. Soc. 16: 1114-1120 (1965).

[7] H. Petersson, Zur Theorie der Lie-Tripel-Algebren, Math. Z. 97: 1-15 (1967).

[8] A. V. Sidorov, On Lie Triple algebras, Translated from Algebra i Logika. 20 (1): 101-108(1981).