Una Caracterización de Regularidad Maximal para Ecuaciones Integrodiferenciales

Carlos Lizama *

El objetivo de este trabajo es establecer una caracterización de regularidad maximal para la siguiente ecuación integro-diferencial

$$\frac{d}{dt}(b_0u(t)+\int_{-\infty}^{t}\beta(t-s)u(s)ds)+a_\infty u(t)=c_0Au(t)-\int_{-\infty}^{t}\gamma(t-s)Au(s)ds+f(t), \tag{1}$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $u(t)$ toma valores en un espacio de Banach X. Aqui, $A : D(A) \subset X \to X$ es un operador lineal cerrado (con dominio no necesariamente denso en X) y β, γ son funciones a valores reales definidas en $[0, \infty)$.

Regularidad maximal es una herramienta muy útil para el estudio de problemas semilineales y cuasilineales. Problemas concretos usando este método han sido estudiados recientemente (ver por ejemplo [1], [4] y [16]).

La ecuación (1) corresponde a la versión lineal abstracta de la siguiente ecuación integrodiferencial semilineal

$$\frac{\partial}{\partial t}(b_0u(t,x)+\int_{-\infty}^{t}\beta(t-s)u(s,x)ds)+a_\infty u(t,x)=c_0\Delta u(t,x)$$

$$-\int_{-\infty}^{t}\gamma(t-s)\Delta u(s,x)ds+G(x,u(t,x),\nabla u(t,x))+f(t,x),\quad t\in\mathbb{R}, x\in\Omega, \tag{2}$$

donde Ω es un subconjunto abierto acotado de $\mathbb{R}^N$ con frontera regular $\partial\Omega$, Δ es el operador de Laplace N-dimensional y ∇ es el operador gradiente. La función $u(t,x)$ representa la temperatura del punto $x \in \bar{\Omega}$ en el tiempo $t \in \mathbb{R}$, $f(t,x)$ es el suministro de calor, b_0 y c_0 (llamados respectivamente, capacidad de calor y constante de conductividad termal) son reales positivos. Las funciones de relajacion β y γ son usualmente de la forma

$$\beta(t)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e^{-b_i t},\quad \gamma(t)=\sum_{j=1}^{m}\gamma_j e^{-c_j t} \tag{3}$$

*Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile. Casilla 307, Correo 2. Santiago, Chile. e–mail: `clizama@lauca.usach.cl`.
Trabajo financiado parcialmente por Proyecto Fondecyt 1050084

con $\beta_i, b_i, \gamma_j, c_j > 0$, donde n, $m \in \mathbb{N}$.

La ecuación (2) se origina en el estudio de flujo de calor en materiales con memoria. Esta ecuación ha sido estudiada en [17] bajo varias condiciones de borde sobre el operador Δ. El problema lineal (1) ha sido estudiado en [5] and [15], mientras que versiones no-lineales han sido discutidas en [6], [7], [9], [10] y [12] entre otros.

En el caso especial $\gamma(\cdot) \equiv 0$, existencia global y regularidad en espacios de Hölder para la solución del problema semilineal abstracto asociado con (2) fué estudiado por Sforza [20]. En [8], Clément y Prüss estudiaron el mismo problema en el espacio $L^p(\mathbb{R}; L^q(\Omega))$. En los trabajos anteriormente mencionados, los autores demuestran existencia de soluciones globales acotadas usando resultados de regularidad maximal para el problema linealizado y estimaciones *a priori* para la solución de (1).

En el caso $\beta(\cdot) \equiv 0$ y $a_\infty = 0$, soluciones acotadas para el problema lineal (1) fueron estudiadas por Prüss [18] haciendo uso de la teoría de familias resolventes. Él asume que A es el generador de un semigrupo analitico y luego lo utiliza en la construcción de la familia resolvente. Por otro lado, soluciones periódicas para el mismo tipo de problema lineal fueron estudiadas originalmente por Da Prato y Lunardi [11] (ver también los resultados recientes [13], [14]).

Resultados de regularidad maximal para el problema lineal (1) han sido estudiado por Clément-Da Prato [5]. Ellos muestran también que si γ es acotado y el primer *momentum* de γ existe, entonces el problema lineal (1) con $\beta = 0$ es esencialmente equivalente al mismo problema con $\beta \neq 0$. Similares resultados de regularidad maximal fueron obtenidos por Amann [2]. El método de solución para la ecuación (1) que emplearemos en esta ponencia difiere de todos los trabajos anteriormente mencionados y nos permite obtener resultados con soluciones que pueden no ser acotadas. En efecto, consideraremos funciones continuas y no sólo funciones acotadas en espacios de Hölder.

Estudiaremos directamente el problema (1) en espacios de Hölder por un método que se basa en multiplicadores de Fourier a valores en operadores. Este tipo de argumentos fué iniciado por L. Weis en [22] (ver también [3] y [21]) en la investigación de regularidad maximal para el problema de Cauchy abstracto de primer orden. El teorema de multiplicadores de Fourier a valores en operadores que utilizaremos fué establecido por Arendt-Batty-Bu en [3].

En contraste con todos los articulos anteriores que tratan con este tema, es importante destacar que *buen planteo*, en el sentido que existe una única solución clásica de (1)con regularidad maximal, logra ser caracterizada completamente en términos del operador resolvente de A y sin restricciones sobre el espacio de Banach X. Si denotamos por $R(\lambda, A)$ el operador resolvente de A en λ para $\lambda \in \rho(A)$, demostraremos que el problema (1) es C^α-bien planteado si y sólo si

$$b(\eta) := \frac{i\eta(b_0 + \tilde{\beta}(\eta)) + a_\infty}{c_0 - \tilde{\gamma}(\eta)} \in \rho(A) \text{ para cada } \eta \in \mathbb{R} \text{ y}$$

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}} || \frac{i\eta}{c_0 - \tilde{\gamma}(\eta)} R(b(\eta), A) || < \infty,$$

donde $\tilde{\eta}$ y $\tilde{\gamma}$ representan las transformadas de Fourier de η y γ respectivamente (más precisamente de sus extensiones a $\mathbb{R}$ definiéndolas como iguales a 0 en $(-\infty, 0)$).

Entre las condiciones que imponemos a β y γ está la de $k-$regularidad. Este concepto, que se introduce en esta ponencia, es diferente de aquel usado por J. Prüss [19, Definition 3.3]. Adicionalmente, no haremos uso de hipótesis alguna de parabolicidad en el operador, ni aún que A genere un semigrupo de operadores. En efecto, daremos ejemplos que muestran que la condición que A sea el generador de un semigrupo no es necesaria.

Bibliografía

[1] H. Amann. *On the strong solvability of the Navier-Stokes equations.* J. Math. Fluid. Mech. **2** (2000), 16-98.

[2] H. Amman. *Operator-valued Fourier multipliers, vector-valued Besov spaces, and applications,* Math. Nachr. **186** (1997), 5-56.

[3] W. Arendt, C. Batty, S. Bu. *Fourier multipliers for Hölder continuous functions and maximal regularity.* Studia Math. **160** (2004), 23-51.

[4] Ph. Clément, S.O. Londen, and G. Simonett. *Quasilinear evolutionary equations and continuous interpolation spaces.* J. Differential Equations **196** (2) (2004), 418-447.

[5] Ph. Clément, G. Da Prato. *Existence and regularity results for an integral equation with infinite delay in Banach space.* Integral Equations and Operator Theory **11** (1988), 480- 500.

[6] Ph. Clément, J.A. Nohel. *Abstract linear and nonlinear Volterra equations preserving positivity.* SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), 365-388.

[7] Ph. Clément, J.A. Nohel. *Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels.* SIAM J. Math. Anal. **12** (1981), 514-535.

[8] Ph. Clément, J. Prüss. *Global existence for a semilinear parabolic Volterra equation.* Math. Z. **209** (1992), 17-26.

[9] B.D. Coleman. *Thermodynamics of materials with memory,* Arch. Rational Mech. Anal. **17** (1964), 1-46.

[10] B.D. Coleman, M.E. Gurtin. *Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors.* Z. Angew. Math. Phys. **18** (1967), 199-207.

[11] G. Da Prato, A. Lunardi. *Periodic solutions for linear integrodifferential equations with infinite delay in Banach spaces.* Lect. Notes in Math. **1223** (1985), 49-60.

[12] S.O. Londen, J.A. Nohel. *A nonlinear Volterra integrodifferential equation occurring in heat flow.* J. Integral Equations, **6** (1984), 11-50.

[13] V. Keyantuo, C. Lizama. *Fourier multipliers and integro-differential equations in Banach spaces.* J. London. Math. Soc., (2) **69** (2004), 737-750.

[14] V. Keyantuo, C. Lizama, *Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces.* Studia Math. (1) **168** (2005), 25-50.

[15] A. Lunardi. *On the linear heat equation with fading memory.* SIAM J. Math. Anal. **21**(5) (1990), 1213-1224.

[16] S. Monniaux. *On uniqueness for the Navier-Stokes system in* $3D$*-bounded Lipschitz domains.* J. Funct. Anal. **195** (2003), 1-11.

[17] J.W. Nunziato. *On heat conduction in materials with memory,* Quart. Appl. Math. **29** (1971), 187-304.

[18] J. Prüss. *Bounded solutions of Volterra equations.* SIAM J. Math. Anal. **19** (1) (1988), 133- 149.

[19] J. Prüss. Evolutionary Integral Equations and Applications. Monographs in Math. **87**, Birkhäuser, 1993.

[20] D. Sforza. *Existence in the large for a semilinear integrodifferential equation with infinite delay.* J. Differential Equations **120** (1995), 289-293.

[21] L. Weis. *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal* L_p*-regularity.* Math. Ann. **319** (2001), 735-758.

[22] L. Weis. *A new approach to maximal* L_p*-regularity.* Lect. Notes Pure Appl. Math.**215**, Marcel Dekker, New York, (2001), 195-214.