EJEMPLOS DE CURVAS GENERALIZADAS DE FERMAT

GABINO GONZÁLEZ DIEZ. RUBÉN A. HIDALGO Y MAXIMILIANO LEYTON A.

Resumen. Diremos que una superficie de Riemann S es una curva generalizada de Fermat del tipo (n,k), sí S admite un grupo de automorfismos conformes $H \cong \mathbb{Z}_k^n$ tal que S/H tiene signatura $(0, n+1; k, k..., k)$; el grupo H lo denominaremos por grupo generalizado de Fermat del tipo (n,k). En este trabajo estudiaremos las curvas generalizadas de Fermat del tipo $(2,k)$ y $(3,k)$, donde $k \geq 4$ y $k \geq 3$ respectivamente, y concluiremos que para estos casos el grupo generalizado de Fermat respectivo es único en el grupo de automorfismos conformes totales.

1. Introducción

En el trabajo [4] se muestra que las curvas generalizadas de Fermat del tipo $(2,k)$ corresponden ser las clásicas curvas de Fermat

$$x^k + y^k + z^k = 0,$$

y que las del tipo (n,k) pueden ser obtenidas por la intersección de las siguientes hiper superficies en $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1^k + x_2^k + x_3^k & = & 0 \\ \lambda_1 x_1^k + x_2^k + x_4^k & = & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \lambda_{n-2} x_1^k + x_2^k + x_{n+1}^k & = & 0 \end{array} \right.$$

donde $\lambda_j \in \mathbb{C} - \{0,1\}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$. La condición en los parámetros λ_j obliga que la curva sea no singular.

Note que lo dicho anteriormente hace plausible que estas curvas puedan ser llamadas generalizadas de Fermat. En los trabajos [5] y [4] se probo que si G es un grupo Fuchsiano que uniformiza un Orbifold de signatura $(0, n+1; k, k, ..., k)$ el subgrupo de conmutadores de

2000 *Mathematics Subject Classification.* 30F10, 30F35.

Key words and phrases. Superficies de Riemann, Grupos Fuchsianos, Orbifold.

Este trabajo fue parcialmente financiado por los Proyectos Fondecyt 1030252, 1030373 y UTFSM 12.03.21.

G, el cual denotaremos por $[G, G]$, uniformiza una curva generaliza de Fermat del tipo (n, k); de hecho todas las curvas generalizadas de Fermat se obtienen así. Ademas, en [5] se demostró que para el caso de las curvas generalizadas de Fermat del tipo $(2, k)$ y $(3, k)$ los grupos generalizados de Fermat respectivos son normales en los grupos de automorfismos conformes totales de las superficies correspondientes. Si bien para el tipo $(2, k)$ lo anterior es clásicamente conocido, en el trabajo anteriormente mencionado se muestra que es una consecuencia directa de [9]. .

A los grupos Fuchsianos con signatura $(0, n+1; k_1, .., k_{n+1})$ los denotemos por $G_{(0,n+1;k_1,...,k_{n+1})}$, donde debe cumplirse que $n \geq 2$, $k_1, ..., k_{n+1} \in \{2, 3, 4, ...\}$, y que $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{k_j} < (n-1)$. En el caso $n = 2$ utilizaremos Δ en vez de G para designar al grupo anterior.

Sabemos por [2] que un Orbifold con signatura $(0, n+1; k_1, ...k_{n+1})$ es uniformizado como Orbifold por un grupo Fuchsiano con signatura $(0, n+1; k_1, ..., k_{n+1})$.

Si G_1 y G_2 son grupos Fuchsianos tales que $G_1 < G_2$ con índice finito, entonces diremos que G_1 tiene *crecimiento Fuchsiano* al grupo G_2.

Por [9] sabemos que si G_1 tiene crecimiento Fuchsiano al grupo G_2, se cumple que $d(G_2) \leq d(G_1)$, donde $d(\Gamma)$ es la dimensión del espacio de deformaciones de Γ o simplemente espacio de Teichmüller $T(\Gamma)$ cuando Γ no posee elementos hiperbólicos de frontera.

D. Singerman en el articulo anteriormente mencionado clasificó los crecimientos Fuchsianos de grupos G_1 a grupos G_2 tales que se cumple que $d(G_1) = d(G_2)$.

Es simple verificar que $d(\Delta_{(0,3;k,k,k)}) = 0$, y por [9] que el único crecimiento Fuchsiano de $\Delta_{(0,3;k,k,k)}$, que contiene a $[G_{(0,3;k,k,k)} : G_{(0,3;k,k,k)}]$ como subgrupo normal, es el grupo $\Delta_{(0,3;2,3,2k)}$. El cual contiene de manera normal a $\Delta_{(0,3;k,k,k)}$ con indice 6.

Para el caso de las curvas generalizadas de Fermat del tipo $(3, k)$ se puede probar que $d(G_{(0,4;k,k,k,k)}) = 2$, y desde [9], que $G_{(0,4;k,k,k,k)}$ tiene crecimiento Fuchsiano, preservando la dimensión, al grupo $G_{(0,4;2,2,2,k)}$. El cual contiene de manera normal a $G_{(0,4;k,K,k,k)}$ con indice 4.

2. Resultados

Con la anterior introducción podemos enunciar las siguientes proposiciones que prueban el resultado de este trabajo.

Proposición 2.1. *Todo grupo Fuchsiano con presentación $G_{(0,3;2,3,2k)}$ contiene un único grupo Fuchsiano con presentación $G_{(0,3;k,k,k)}$, el cual* *es normal con índice seis y el grupo cociente es isomorfo al grupo simétrico de tres letras* $\mathcal{S}_3$.

Proposición 2.2. *Todo grupo con presentación* $G_{(0,4;2,2,2,k)}$ *contiene un único subgrupo con presentación* $G_{(0,4;k,k,k,k)}$*, el cual es normal con índice cuatro y el grupo cociente es isomorfo al grupo de Klein.*

2.1. Crecimiento Fuchsiano del grupo $G_{(0,4;2,2,2,k)}$**.** Por lo mencionado anteriormente se sabe que el grupo $G_{(0,4;2,2,2,k)}$ es maximal, en el sentido de crecimiento en dimensión fija del espacio de Teichmüller, luego la posibilidad de crecimiento Fuchsiano del grupo $G_{(0,4;2,2,2,k)}$, es a grupos triangulares. Ademas por lo dicho en la introducción solo nos interesan los crecimientos normales, de lo cual se puede probar que las únicas posibilidades disjuntas son que $G_{(0,4;2,2,2,k)}$ crezca a $\Delta_{(0,3;2,3,3k)}$ o a $\Delta_{(0,3;2,4,2k)}$.

Con lo siguiente terminamos el último paso para nuestro resultado

Proposición 2.3. *Los grupos* $\Delta_{(0,3;2,3,3k)}$ *y* $\Delta_{(0,3;2,4,2k)}$ *contienen un único grupo con presentación* $G_{(0,4;2,2,2,k)}$.

Como lo anunciamos, juntando las proposiciones anteriores obtenemos el siguiente

Teorema 2.1. *Consideremos el par* (S, H) *donde* S *es unas curva generalizada de Fermat del tipo* (n, k) *y* H *el correspondiente grupo generalizado de Fermat.*

i) *Si* $n = 2$ *y* $k \geq 4$*, entonces* H *es único en* $Aut(S)$.
ii) *Si* $n = 3$ *y* $k \geq 3$*, entonces* H *único en* $Aut(S)$.

Referencias

[1] Abikof, W. *The real analytic theory of Teichmüller spaces*, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Vol. 820, 1980.

[2] Farkas, H. M. y Kra, I. *Riemann Surfaces*, Graduate Text in Mathematics Vol. 71, Springer-Verlag NY 1980.

[3] Hidalgo, R.A. *Introducción a las Transformaciones de Möbius*, Notas de Cursillo, $XVII$ Jornadas de matemática de la zona sur, 2003.

[4] González, G., Hidalgo, R.A. y Leyton, M. *Generalized Fermat Curves* preprints, UTFSM 2005.

[5] leyton, M. *Cubrimientos Abelianos Maximales*, Tesis de Magister en Ciencias mención Matemática, UTFSM, 2004.

[6] Maskit, B. *Kleinian Groups*, Springer-Verlag NY 1987.

[7] Massey, W. *Algebraic Topology: An Introduction*, Harcourt,Brace & World, Inc., NY 1967.

[8] Nag, S. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, A wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1988.

[9] Singerman, D. *Finitely Maximal Fuchsian Groups*, J. London Math. Soc., (2), 6(1972), 29-38.