CORRESPONDENCIA DE KANEV Y VARIEDADES ABELIANAS DE DIMENSIÓN 6

HERBERT LANGE, ANITA ROJAS

RESUMEN. Sea G el grupo de Weyl asociado al sistema de raíces E_8. Construiremos una curva X con acción de G, de tal forma que en la curva cuociente $C = X/H$, H subgrupo de G de índice 27, se define una correspondencia $\mathcal{K}$, al estilo de Kanev ([2]).

La correspondencia $\mathcal{K}$ determina una subvariedad P de la Jacobiana de C, que es una variedad de Prym-Tyurin de exponente 6. La dimensión de P depende del número, y tipo, de los puntos de ramificación del cubriente $\pi_G : X \to \mathbb{P}^1 = X/G$.

Un caso particular de esta construcción, i.e. considerando 24 puntos marcados en $\mathbb{P}^1 = X/G$ del tipo dado por la clase de conjugación de las reflexiones de G, conduce a que P es una variedad de Prym-Tyurin de exponente 6 y dimensión 6. El móduli de la situación es 21, al igual que la dimensión del móduli de variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión 6. Esto último sugiere, con bastante optimismo y aún en estudio, que la variedad abeliana de dimensión 6 genérica es una Prym-Tyurin de exponente 6.

1. INTRODUCCIÓN

Una variedad abeliana principalmente polarizada (P, Σ) se llama de Prym-Tyurin (respecto de una curva C) si existe una curva (proyectiva, lisa e irreducible) C tal que P se inyecta como una subvariedad abeliana de la Jacobiana de C, $i : P \to JC$, de tal forma que $i^*(\Theta) = q\Sigma$. $q \in \mathbb{N}$ se llama el exponente de P.

Ejemplos triviales de ello son: la variedad Jacobiana de una curva C es una Prym-Tyurin de exponente 1 respecto de C. Si consideramos $X \to C$ cubriente $2:1$ no ramificado o con 2 puntos de ramificación, la variedad de Prym (clásica) del cubrimiento $P(X/C) \subset JX$ es de Prym-Tyurin respecto de X y de exponente 2.

Es conocido que para dimensiones 2 y 3, la variedad abeliana principalmente polarizada genérica es una Jacobiana; i.e., es una Prym-Tyurin de exponente 1. Para dimensiones 4 y 5, es una Prym clásica; i.e. una Prym-Tyurin de exponente 2.

Un teorema de Welters ([1]) muestra que toda variedad abeliana principalmente polarizada (v.a.p.p) es una Prym-Tyurin de exponente

$$3^{g-1}(g-1)! \quad ,$$

donde g es la dimensión de la variedad. Ya en los anteriores ejemplos se observa que el teorema de Welters describe una v.a.p.p. como una Prym-Tyurin de exponente mucho mayor al exponente con el cual ya se pueden describir como tales.

Considerando que hasta dimensión 5 es conocido que las v.a.p.p. pueden describirse como variedades de Prym-Tyurin de exponente menor al que da el teorema de Welters; la siguiente pregunta natural es si las v.a.p.p. de dimensión 6, pueden describirse como Prym-Tyurin de exponente menor que $3^5 \cdot 5$.

2. Resultados

Dada una curva C, una correspondencia es un elemento $\mathcal{K} \in \mathrm{Div}(C \times C)$. Este define un endomorfismo de JC, que denotaremos de la misma manera. Dado en términos de $x \in C$:

$$\mathcal{K}(x) := p_{2*}(p_1^*(x) \cap \mathcal{K}) \in \mathrm{Div}^d(C)$$

donde p_1 y p_2 son las proyecciones en la primera y segunda coordenadas. El endomorfismo $\gamma_{\mathcal{K}}$ en la Jacobiana está dado por la extensión de lo anterior a $JC = \mathrm{Div}^0(C)/\,\mathrm{Ppal}(C)$, d se denomina el grado de la correspondencia. $\mathcal{K}$ se dice simétrico si $\mathcal{K}^t(x) := p_{1*}(p_2^*(x) \cap \mathcal{K})$ es igual a $\mathcal{K}(x)$ y libre de puntos fijos si $\mathcal{K} \cap \Delta = \emptyset$, con Δ la diagonal en $\mathrm{Div}(C \times C)$.

El criterio de Kanev [2] se puede resumir en que si $\mathcal{K}$ es una correspondencia en C efectiva, simétrica, sin puntos fijos y que satisface

$$\mathcal{K}^2 + (q-2)\mathcal{K} - (q-1) \text{ linealmente equivalente a } 0 \ .$$

Entonces la subvariedad P de JC determinada por la imágen de $1-\gamma_{\mathcal{K}}$, es una variedad de Prym-Tyurin con respecto a C y de exponente q.

Una serie de resultados, que se encuentran en [1] por ejemplo, nos permiten calcular la dimensión de P, en el contexto que estamos, como

$$\dim P = \frac{1}{q}(g_C - \deg \mathcal{K})$$

donde g_C es el género de C y $\deg \mathcal{K}$ es el grado de la correspondencia.

Sea G el grupo de Weyl correspondiente al sistema de raices E_8. Para este grupo Kanev considera $\psi : C \to \mathbb{P}^1$ un cubriente $27 : 1$, con ramificación simple, tal que su monodromía es G. Construye una correspondencia $\mathcal{K}$ sobre C de grado 10, simétrica, sin puntos fijos y que satisface la ecuación requerida para $q = 6$. Esto conduce a que la subvariedad de JC determinada por $1 - \gamma_{\mathcal{K}}$ es una Prym-Tyurin de exponente 6.

En términos de teoría de galois, lo que buscamos es una curva X (que corresponde al cubriente de Galois de $C \to \mathbb{P}^1$) con acción de G con cuociente $\mathbb{P}^1$ y tal que los estabilizadores pertenezcan a la clase de conjugación G_r de las reflexiones de G. De acuerdo a lo desarrollado en [3], esto es equivalente a encontrar elementos en G_r que generen G y con producto trivial.

Analizando la estructura de G, vemos que se puede generar con 6 reflexiones, correspondientes a los 6 elementos de una base del sistema de raices. Para que el sistema de generadores tenga producto trivial, hay que tomar al menos 12 reflexiones. De hecho, el número de generadores cumpliendo las caracteristicas es $\alpha = 12 + 2k$ con $k \in \mathbb{N}$. Observamos [3] que α corresponde al número de puntos marcados en $X/G = \mathbb{P}^1$ y G_r al tipo de ellos. En este contexto C corresponde al cuociente de X por un subgrupo de índice 27 de G: hay sólo una clase de conjugación y corresponde al grupo de Weyl del sistema D_5.

Esto nos permite calcular la dimensión de la Prym en términos de los puntos fijos; esto es, $\dim P = k$

Observación final: La construcción da un morfismo del espacio de cuvas con acción de G del tipo $(0; \alpha \cdot G_r)$ de dimensión $\alpha - 3$ al espacio de v.a.p.p. de dimensión $\frac{\alpha}{2} - 6$, que tiene dimensión $\frac{(\frac{\alpha}{2}-6)(\frac{\alpha}{2}-5)}{2}$. En el caso de $\alpha = 24$, ambas dimensiones coinciden.

Referencias

1. Lange, H., Birkenhake, Ch., Complex Abelian Varieties. *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften,* **302**. Springer, (1982).
2. Kanev, V., Spectral curves and Prym-Tjurin varieties I. *Abelian varieties, Egloffstein, de Gruyter,* **151–198**. Berlin, (1995).
3. Rojas, A. M. *Group actions on Jacobian varieties* preprint, AG/0310158, (2003).

Departamento de Matemáticas, Fac. de Ciencias, Universidad de Chile
E-mail address: anirojas@uchile.cl