SOLUCIONES GLOBALES DE UN PROBLEMA FUNCIONAL DE SEGUNDO ORDEN CON CONDICIONES NO LOCALES. *

HERNÁN R. HENRÍQUEZ
Universidad de Santiago, Departamento de Matemática, Casilla 307, Correo 2,
Santiago, Chile. E-mail: hhenriqu@lauca.usach.cl Fax 56-2-6813125

EDUARDO HERNÁNDEZ M.
Departamento de Matemática, I.C.M.C.-Universidade de São Paulo,
13560-970 São Carlos, SP, Brasil. E-mail : lalohm@icmc.sc.usp.br

Resumen

En este trabajo estudiamos existencia de soluciones débiles para un problema de Cauchy abstracto funcional de segundo orden con condiciones no locales.

1 Introducción

Sea X un espacio de Banach dotado con una norma $\|\cdot\|$. En este trabajo representaremos por I al intervalo $[0,\infty)$, y denotaremos por $C(I;X)$ al espacio de funciones continuas de I en X. Sea A el generador infinitesimal de una función coseno fuertemente continua de operadores lineales acotados $C(t)$ en X. El propósito del trabajo es establecer existencia de soluciones para el problema de Cauchy

$$x''(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(a(t))), \quad t \in I, \tag{1.1}$$

$$x(0) + p(x) = x_0, \tag{1.2}$$

$$x'(0) + q(x) = x_1, \tag{1.3}$$

donde $x_0, x_1 \in X$, $a : I \to I$, $p, q : C(I;X) \to X$ y $f : I \times X^2 \to X$ son funciones apropiadas.

Para las propiedades básicas de la teoría de funciones coseno puede consultarse [2, 7]. A continuación sólo mencionamos algunas notaciones necesarias para establecer nuestros resultados. Denotamos por $S(t)$ la función seno correspondiente a $C(t)$, la cual se define por

$$S(t)x = \int_0^t C(s)x\,ds, \quad x \in X, \quad t \in I\!R.$$

La notación E indica el espacio formado por los elementos $x \in X$ para los cuales la función $C(\cdot)x$ es de clase C^1. La existencia de soluciones del problema abstracto de Cauchy de segundo orden

$$x''(t) = Ax(t) + h(t), \quad t \geq 0, \tag{1.4}$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \tag{1.5}$$

donde $h : [0,\infty) \to X$ es una función localmente integrable ha sido estudiada en [8, 4]. Análogamente, la existencia de soluciones del problema semi-lineal ha sido considerada en [9]. Una

*Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el proyecto FONDECYT 1050314.

discusión sobre los origenes e interés del problema no local, asi como otros aspectos relacionados, se encuentra en [5]. La demostración de los resultados que siguen, de otros resultados de existencia, de regularidad de soluciones y aplicaciones se encuentra en [6], .

2 Existencia de soluciones.

En los enunciados que siguen suponemos que $M \geq 1$ y $N \geq 0$ son constantes tales que $\|C(t)\| \leq M$ y $\|S(t)\| \leq N$, para todo $t \in I$. Consideraremos dos casos. En primer término estudiaremos existencia de soluciones en espacios de funciones continuas con peso y posteriormente estableceremos existencia de soluciones asintóticamente casi-periódicas.

Sea $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ una función continua tal que $g(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$ y tal que g es creciente y $g(0) = 1$. A continuación $C_g^0(X)$ representa el espacio de Banach formado por las funciones continuas $x : [0, \infty) \to X$ tal que $\dfrac{x(t)}{g(t)} \to 0$, $t \to \infty$, dotado con la norma

$$\|x\|_g = \sup_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{g(t)}.$$

Para tratar este problema supondremos que se verifican las siguientes condiciones generales.

Hipótesis A.

(a) La función $a : I \to I$ es continua y $a(t) \leq t$, para todo $t \in I$;

(b) La función $f : I \times X^2 \to X$ satisface las siguientes condiciones de Carathéodory :

(i) $f(t, \cdot) : X \times X \to X$ es continua c.t.p. $t \in I$;

(ii) Para cada $x, y \in X$, la función $f(\cdot, x, y) : I \to X$ es fuertemente medible.

(c) Existe una función integrable $m : I \to [0, \infty)$ y una función continua no decreciente $W : [0, \infty) \to (0, \infty)$ tal que

$$\|f(t, x, y)\| \leq m(t) W(\| x \| + \| y \|),$$

para todo $t \in I$ y $x, y \in X$.

(d) Las funciones $p, q : C(I; X) \to X$ son continuas.

Consideraremos el siguiente concepto de solución débil.

Definición 2.1 *Diremos que una función $x : I \to X$ es una solución débil del problema (1.1)-(1.3) si x es una función continua que satisface la ecuación integral*

$$x(t) = C(t)(x_0 - p(x)) \ + \ S(t)(x_1 - q(x)) \ + \ \int_0^t S(t - s) f(s, x(s), x(a(s)))\, ds, \ \ t \in I. \qquad (2.1)$$

Teorema 2.1 *Supongamos que se verifican las siguientes condiciones.*

(a) *Las funciones p, $q : C_g^0(X) \to X$ son continuas acotadas y p es completamente continuo;*

(b) *La función $S(t)q : C_g^0(X) \to X$ es completamente continua para cada $t \geq 0$;*

(c) *Para cada $t \in I$, $t' \leq t$, y cada $L \geq 0$ el conjunto $\{S(t') f(s, x, y) : 0 \leq s \leq t, \|x\|, \|y\| \leq L\}$ es relativamente compacto;*

(d) *Para toda constante* $L \geq 0$, $\dfrac{1}{g(t)} \displaystyle\int_0^t m(s)W(Lg(s))\,ds \to 0,\ t \to \infty$;

(e) $2N \displaystyle\int_0^\infty m(s)\,ds < \int_{2c}^\infty \frac{1}{W(s)}\,ds$, *donde* $c = M(\|x_0\| + N_p) + N(\|x_1\| + N_q)$.

Entonces existe una solución débil $x \in C_g^0(X)$ *de (1.1)-(1.3).*

A continuación estudiamos existencia de soluciones asintóticamente casi-periódicas. Para los conceptos básicos sobre funciones casi-periódicas y asintóticamente casi-periódicas mencionamos [10]. En particular, denotamos por $AP(X)$ (resp. $AAP(X)$) el espacio formado por las funciones $x : [0, \infty) \to X$ que son casi-periódicas (resp. asintóticamente casi-periódicas), provisto con la norma de la convergencia uniforme. También utilizamos las propiedades de funciones coseno casi-periódicas y funciones seno casi-periódicas. Para la caracterización de funciones coseno casi-periódicas puede verse [1] y [3] para propiedades similares de las funciones seno casi-periódicas.

Teorema 2.2 *Supongamos que* $S(\cdot)$ *es casi-periódica y que se verifican las siguientes condiciones:*

(a) *Las funciones* p, $q : AAP(X) \to X$ *son completamente continuas y acotadas;*

(b) *Para cada* $t > 0$ *y cada constante* $L \geq 0$ *el conjunto* $\{f(s, x, y) : 0 \leq s \leq t,\ \|x\|, \|y\| \leq L\}$ *es relativamente compacto;*

(c) $2N \displaystyle\int_0^\infty m(s)\,ds < \int_{2c}^\infty \frac{1}{W(s)}\,ds.$

Entonces existe una solución débil $x \in AAP(X)$ *de (1.1)-(1.3).*

Referencias

[1] Cioranescu, I., Characterizations of almost periodic strongly continuous cosine operator functions. *J. Math. Anal. Appl.* **116** (1986), 222-229.

[2] Fattorini, H. O., Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 108, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[3] Henríquez, H. R.and Vásquez, C., Almost Periodic Solutions of Abstract Retarded Functional Differential Equations with Unbounded Delay. *Acta Appl. Math.* **57** (1999), 105-132.

[4] Henríquez, H. R. y Vásquez, C. H., Differentiability of solutions of the second order abstract Cauchy problem. *Semigroup Forum,* **64** (2002), 472-488.

[5] Henríquez, H. R. y Hernández, E., Existence of solutions of a second order abstract functional Cauchy problem with nonlocal conditions. Pre-print.

[6] Hernández, E. y Henríquez, H. R., Global Solutions for a Functional Second Order Abstract Cauchy Problem with Nonlocal Conditions. *Annales Polonici Mathematici.* **83** (2004), 149-170.

[7] Travis, C. C. y Webb, G. F., Second order differential equations in Banach space, in Proceedings on "Internat. Sympos. on Nonlinear Equations in Abstract Spaces", Academic Press, New York, 1987, pp. 331-361.

[8] Travis, C. C. y Webb, G. F., Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families, *Houston J. Math.* **3** (4) (1977) 555-567.

[9] Travis, C. C. y Webb, G. F., Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. *Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae,* **32** (1978) 76-96.

[10] Zaidman, S. D., *Almost Periodic Functions in Abstract Spaces.* Pitman, London, 1985.