Operadores adjuntos y autoadjuntos en el espacio p-Hilbert c_0

José Aguayo*
Universidad de Concepción

Miguel Nova
Universidad Católica de la Santisima Concepción

XX Jornada de Matemática de la Zona Sur
Universidad de Los Lagos, Osorno
Puyehue, Abril 2006

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo con valuación no arquimedeana, el cual es un espacio métrico completo con la métrica inducida por la valuación. Se asumirá que el cuerpo residual de $\mathbb{K}$ es formalmente real, es decir, para cualquier familia finita $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ del cuerpo residual que satisface la condición $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 0$, se tendrá que cada $a_i = 0$.

Bajo esta condición para $\mathbb{K}$, la norma del supremo del espacio
$c_0 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{K} \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ proviene del producto interno definido por $\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$.

Un operador continuo $u \in \mathcal{L}(c_0)$ tiene la forma $u = \sum_{i,j\geq 1} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$, donde $\lim_{i\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0;\ \forall j \in \mathbb{N}$ y $e'_j \otimes e_i : c_0 \to c_0$ es definido por $e'_j \otimes e_i(e_k) = \langle e_k, e_j\rangle\, e_i$.

De esta manera, podemos ver a un operador $u \in \mathcal{L}(c_0)$ como la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3j} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots \\ \vdots & & & & & \ddots \\ \underset{0}{\downarrow} & \underset{0}{\downarrow} & \underset{0}{\downarrow} & \cdots & \underset{0}{\downarrow} & \cdots \end{pmatrix}$$

Definición 1 *Un operador $u \in \mathcal{L}(c_0)$ se dice que*

1. *admite un operador adjunto $v = u^* \in \mathcal{L}(c_0)$ si $\lim_{j\to\infty} |\alpha_{ij}| = 0,\ \forall i \in \mathbb{N}$.*

*Este trabajo esta parcialmente financiado por el Proyecto DIUC 205.013.024-1.0

Esto es,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & \to 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & \to 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3j} & \cdots & \to 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \alpha_{i3} & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & \to 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ \downarrow_0 & \downarrow_0 & \downarrow_0 & \cdots & \downarrow_0 & \cdots & \end{pmatrix}$$

2. *es un operador autoadjunto si* $\alpha_{ji} = \alpha_{ij};\ \forall i, j \geq 1$.

3. *es una proyeccón normal si satisface*

   (a) $u^2 = u$, *lo que implica que* $c_0 = N(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$ *y que* $\operatorname{Im}(u)$ *es cerrado.*

   (b) $\langle x, y \rangle = 0;\ x \in N(u),\ y \in \operatorname{Im}(u)$

En este trabajo entregaremos algunas condiciones necesarias y suficientes para que un operador $u \in \mathcal{L}(c_0)$ sea una proyección normal.

Proposición 2 *Si* $u \in \mathcal{L}(c_0)$ *es una proyección (es decir* $u^2 = u$*) y, además satisface la condición*

$$\forall x = (x_n) \in N(u);\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ij} x_i = 0,\ \forall j \geq 1,$$

entonce u *es una proyección normal.*

Proposición 3 *Sea* $u \in \mathcal{L}(c_0)$ *con* $u = \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$*. Entonces, si* $u^2 = u$*, entonces* $\sum_{k \geq 1} \alpha_{ik} \alpha_{kj} = \alpha_{ij}$*, cualquiera sean* $i, j \in \mathbb{N}$.

Proposición 4 *Sea* $u \in \mathcal{L}(c_0)$ *con* $u = \sum_{i,j \geq 0} \alpha_{ij} e'_j \otimes e_i$*. Entonces, si* u *es una proyección normal, entonces*

$$\left\{ \begin{array}{c} \sum_{i \geq 0} \alpha_{ik}^2 = \alpha_{kk},\ k \geq 0 \\ \text{and} \\ \sum_{j \geq 0} \alpha_{ij} \alpha_{jk} = \alpha_{ik},\ i, k \geq 0 \end{array} \right. .$$

Proposición 5 *Sea* $u \in \mathcal{L}(c_0)$*. Son equivalentes*

1. $u^2 = u$ *y* $\forall x \in c_0;\ \langle x - u(x), u(x) \rangle = 0$

2. u *es una proyección normal.*

Teorema 6 *Si* u *es autoadjunta, entonces son equivalentes:*

1. u *es proyección*

2. u es proyección normal.

Observación 7 *Se sabe, del caso clásico de espacios de Hilbert, que una proyección es autoadjunta. El ejemplo*

$$u = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} b^{j-1} e'_j \otimes e_j;\ \ |b| < 1,$$

el cual desarrollaremos, nos mostrará las diferencias de la teoría de espacios de Hilbert en el caso no-arquimedeano comparadas con el caso clásico y, además, nos permitirá preguntarno dónde están las proyecciones normales dentro de $\mathcal{L}(c_0)$.

References

[1] Diarra, Bertin, Geometry of the p-Adic Hilbert Spaces, (pre-print).

[2] Narici, L. and Beckenstein, A non-archimedian inner product, (to appear in the CNM).

[3] van Rooij, Non- Archimedean Functional Analysis, Dekker, New york, 1978.