Entropía de Bowen para endomorfismos de grupos

by

Manuel Sanchis[1]

Departament de Matemàtiques (Universitat Jaume I de Castelló)

R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew [1] introdujeron el concepto de entropía topológica para funciones continuas entre espacios compactos. Este concepto fue generalizado por Bowen [2] para funciones uniformemente continuas en espacios métricos. La definición de Bowen puede reformularse en un contexto más amplio, el de los espacios uniformes, lo que permite genralizaciones no sólo naturales, sino también interesantes. Por ejemplo, con el enfoque uniforme puede abordarse el estudio de la entropía de Bowen para endomorfismos de grupos topológicos, estudio con bastantes antecedentes en la literatura especializada ya que, por ejemplo, la entropía de automorfimos topológicos de grupos abelianos localmente compactos posee propiedades similares a las del caso compacto y, para grupos abelianos localmente compactos, la entropía de Kolmogorov-Sinai puede expresarse en términos de la entropía de Bowen [8]. La entropía de Kolmogorov-Sinai aparece en algunas situaciones interesantes; por ejemplo, bajo ciertas condiciones, proporciona la tasa de crecimiento de la entropía estática de ciertos sistemas caóticos conservativos [5].

En esta comunicación abordamos dos cuestiones relacionadas con la entropía de Bowen de endomorfismos topológicos de grupos abelianos totalmente acotados. Hagamos notar que, si $\alpha : G \to G$ es un endomorfismo topológico de un grupo totalmente acotado G y $\widetilde{\alpha}$ es su extensión continua a la compleción de Weil, $\widehat{G}$, de G, entonces $h_B(\alpha) \leq h_B(\widetilde{\alpha})$ (aquí $h_B(\beta)$ indica la entropía de Bowen de β). Nuestro primer objetivo consiste en analizar cuál es el posible *salto* entre $h_B(\alpha)$ y $h_B(\widetilde{\alpha})$. Demostramos que en, realidad, la diferencia entre ambas entropías puede ser la máxima posible. Para ello construimos endomorfismos topológicos de entropía nula cuya extensión a la compleción del grupo tiene entropía infinita. Una pieza clave en nuestros ejemplos la constituye la propiedad de que un grupo topológico posea sólo compactos finitos. Resaltemos que muchos grupos totalmente acotados poseen esta propiedad, en particular los grupos dotados de la topología totalmente acotado más fina: la topología débil asociada a la familia de todos los homomorfismos del grupo en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ (la topología de Bohr) [4].

En segundo lugar abordamos el estudio de la clase $\mathfrak{E}$ de los grupos topológicos que no admiten endomorfismos de entropía infinita, así como el de la clase $\mathfrak{E}_0$ de los grupos topológicos con la propiedad de que todo endomorfismo tiene entropía nula. Entre otros resultados, probamos que: (1) un grupo abeliano conexo y compacto pertenece a $\mathfrak{E}$ si, y sólo si, es finito dimensional, (2) la hipótesis *abeliano* no puede suprimirse en el resultado anterior, (3) todo grupo topológico abelian compacto y totalmente disconexo en la clase $\mathfrak{E}$ tiene peso menor o igual que el continuo, y (4) la clase $\mathfrak{E}_0$ contiene la

[1]Trabajo conjunto con D. Alcaraz (Universidad Politécnica de Cartagena) y D. Dikranjan (Dipartimento de Matematica e Informatica (Università di Udine)

clase $\mathfrak{O}$ de los grupos de Orsatti (recordemos que un grupo G se denomina *un grupo de Orsatti* si es de la forma $G = \prod_p \mathbb{Z}_p^{n_p} \times F_p$, con $n_p \geq 0$ un número entero y F_p un p–grupo finito para todo número primo p (véase [6], [7] y [3])). Para finalizar comentamos algunos problemas abiertos

Referencias

[1] R.L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), 309–319. MR 30 #5291

[2] Rufus Bowen, *Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 401–414. MR 43 #469

[3] D. Dikranjan, *Compactness and connectedness in topological groups*, Topology Appl. **84** (1998) 227–252.

[4] I. Glicksberg, *Uniform boundedness for groups*, Canad. J. Math. **14** (1962), 269–276. MR 27 #5856

[5] V. Latora, M. Baranger, A. Rapisarda, and C. Tsallis, *The rate of entropy increase at the edge of chaos*, Phys. Lett. A **273** (2000), no. 1-2, 97–103. MR 2001e:82030

[6] A. Orsatti, *Una caratterizzazione dei gruppi abelian compatti o localmente compatti nella topologia naturale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **39** (1967), 219–225.

[7] A. Orsatti, *Introduzione ai gruppi abeliani astratti e topologici*, Quaderni dell'UMI **8** (1979).

[8] J. Peters, *Entropy of automorphisms on L.C.A. groups*, Pacific J. Math. **96** (1981), no. 2, 475–488. MR 83e:54038