SOBRE UN TEOREMA CONVERSO PARA FORMAS MODULARES DE SEGUNDO ORDEN

ÖZLEM IMAMOḠLU, AND YVES MARTIN

En [G] D. Goldfeld introduce cierta variación a la series de Eisenstein clásica con el proposito de investigar el simbolo modular de una forma cuspidal de nivel N. Mas precisamente, Goldfeld considera la siguiente situación:

Sea $\mathcal{H}$ el semi-plano superior complejo y $\Gamma_0(N)$ el grupo

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \text{ es divisible por } N \right\}.$$

Una forma cuspidal $f(\tau) : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ de peso 2 sobre $\Gamma_0(N)$ es una función holomorfa en $\mathcal{H}$ y en las cuspides de $\Gamma_0(N)$ tal que

$$(c\tau + d)^2 f(\tau) = f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad \text{para todo} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N).$$

Tal $f(\tau)$ define el llamado símbolo modular $< \gamma, f >$ para $\gamma \in \Gamma_0(N)$,

$$< \gamma, f > = -2\pi i \int_{i\infty}^{\gamma(i\infty)} f(\tau) d\tau.$$

Esta función contiene bastante información geométrica, que Golfeld ha relacionado con la conjetura de Spiro sobre curvas elípticas. La serie de Eisenstein definida por Goldfeld para el estudio de los símbolos modulares es

$$\mathcal{E}_f(\tau, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} < \gamma, f > Im(\gamma(\tau))^s.$$

Ahora bien, tal $\mathcal{E}_f(\tau, s)$ no es una función modular, pero si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pertenece a $\Gamma_0(N)$ entonces la diferencia

$$\mathcal{E}_f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, s\right) - \mathcal{E}_f(\tau, s)$$

lo es. Este tipo de comportamiento es llamado modularidad de segundo orden.

Esencialmente, una forma modular de segundo orden de peso k y nivel N es una función holomorfa $F(\tau) : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ tal que para cada

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ la diferencia

$$f_\gamma(\tau) = (c\tau + d)^{-k} F\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) - F(\tau)$$

es una forma modular clásica. Tambien se requiere que $F(\tau)$ tenga una representación de Fourier

$$F(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{2\pi i n\tau}.$$

La serie $\mathcal{E}_f(\tau, s)$ no es el único ejemplo de este tipo de objetos. En un trabajo reciente de física-matemática, Klebban y Zagier [K-Z] muestran que ciertas formas modulares de segundo orden juegan un papel relevante en la teoría de percolaciones.

Motivados por estos resultados, varios matemáticos se han dedicado a estudiar diversas propiedades de las formas modulares de segundo orden (por ejemplo [C-D-O'S], [D-O'S 1], [D-O'S 2], [D-K-M-O'S], [J-O'S]). En particular, O. Imamoglu y yo hemos trabajado en lo siguiente:

Determinar las condiciones analíticas que debe satisfacer la series de Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-s}, \qquad s \in \mathbb{C}$$

para concluir que los A_n son los coeficientes de Fourier de una forma modular de segundo orden.

Este es un problema clásico en la teoría de forma automorfas, que en el caso de las formas modulares elípticas, fue resuelto completamente por A. Weil.

Nuestro resultado principal es un teorema converso análogo al de Weil en el caso de las formas modulares de segundo orden, y da una respuesta completa al problema planteado mas arriba.

En nuestra exposición daremos la definición del concepto forma modular de segundo orden, mostraremos ejemplos y describiremos en detalle el resultado obtenido.

Bibliografía

[C-G] G. Chinta and D. Goldfeld, *Grossencharakter L-functions of real quadratic fields twisted by modular symbols*, Invent. Math. 144 (2001), 435–449.

[C-D-O'S] G. Chinta, N. Diamantis and C. O'Sullivan, *Second order modular forms*, Acta Arithm. 103 (2002), 209–223.

[D-O'S 1] N. Diamantis and C. O'Sullivan, *Hecke theory of series formed with modular symbols and relations among convolution L-functions*, Math. Ann. 318 (2000), 85–105.

[D-O'S 2] N. Diamantis and C. O'Sullivan, *The dimensions of spaces of holomorphic second order automorphic forms and their cohomology*, preprint.

[D-K-M-O'S] N. Diamantis, M. Knopp, G. Mason and C. O'Sullivan, *L-functions of second order cusp forms*, preprint.

[G] D. Goldfeld, *Zeta functions formed with modular symbols*, Proc. Symp. Pure Math. 66 (1999), 111–121.

[J-O'S] J. Jorgenson and C. O'Sullivan, *Convolution Dirichlet series and a Kronecker limit formula for second-order Eisenstein series*, preprint.

[K-Z] P. Kleban and D. Zagier, *Crossing probabilities and modular forms*, J. Stat. Phys. 113 (2003), 431–454.

[P] Y. Petridis, *Spectral deformations and Eisenstein series associated with modular symbols*, Int. Math. Res. Not. 19 (2002), 991-1006.