JACOBIANAS CON MULTIPLICACIÓN COMPLEJA

SANTOS HERNÁNDEZ

En 1987, R. Coleman hizo la siguiente conjetura: *Para $g \geq 4$ hay una cantidad finita de curvas algebraicas complejas $\mathcal{C}$ de género g cuyo Jacobiano* $\mathrm{Jac}\,(\mathcal{C})$ *tiene multiplicación compleja.* En 1989, J. de Jong y R. Noot dieron ejemplos de género 4 y 6 donde la conjetura de Coleman es falsa. En efecto, ellos encontraron que las curvas

$$\mathcal{C}_\lambda : \; y^5 = x(x-1)(x-\lambda), \quad y^7 = x(x-1)(x-\lambda),$$

de géneros 4 y 6, respectivamente son tales que $\mathrm{Jac}\,(\mathcal{C}_\lambda)$ tiene multiplicación compleja para una infinidad de λ's.

La finalidad de esta plática es hacer una somera introducción a dicha conjetura. Se comienza con el caso de género 1, (i.e), el caso de curvas elípticas. Un resultado básico es el siguiente. Sea $\mathbb{K}$ un campo imaginario cuadrático sobre $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_\mathbb{K}$ el anillo de enteros algebraicos en $\mathbb{K}$ y $\mathrm{Cl}(\mathbb{K})$ su grupo de clase.

Proposición 1. *Hay una correspondencia uno-uno entre clases de ideales en* $\mathrm{Cl}(\mathbb{K})$ *y clases de isomorfismo de curvas elípticas* $\mathcal{E}$ *sobre* $\mathbb{C}$ *tales que* $\mathrm{End}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}_\mathbb{K}$.

En el trascurso de la plática se demostrará dicho resultado. Estos resultados se encuentran en [1, 2].

Por otro lado, se hará una revisión de algunas de las técnicas que se han desarrollado con el fin de estudiar la multiplicación compleja de Jacobianos. En particular, algunos dados en [3] concerniente a caracterizar superficies de Riemann de género positivo con Jacobiano con multiplicación compleja.

Referencias

[1] G. Shimura, *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971.

[2] J.H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Springer-Verlag, 1986.

[3] J. Wolfart, Triangle groups and Jacobians of CM type.

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Casilla 306, Correo 22, Santiago, Chile