Perturbación Aditiva para Ecuaciones Integro-Diferenciales y Regularidad Maximal

V. Poblete & C. Lizama *

1 Intodución

En este trabajo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones periódicas de la siguiente ecuación integral con retardo infinito

$$\begin{cases} u(t) &= \displaystyle\int_{-\infty}^{t} a(t-s)Au(s)ds + \int_{-\infty}^{t} b(t-s)Bu(s)ds + f(t) \\ \\ u(0) &= u(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

donde $a(\cdot)\,,\, b(\cdot) \in L^1(\mathbb{R}_+)$ son núcleos escalares, A y B son operadores lineales cerrados definidos sobre un espacio UMD tal que $D(A) \subset D(B)$. Ecuaciones de la forma (1) han sido estudiadas por Pugliese [6] (ver también Prüss [5]).

En una primera parte, caso no resonante, caracterizamos las soluciones de (1) con un método basado en teoremas clásicos sobre multiplicadores de Fourier para operadores. Esta técnica ha sido utilizada anteriormente por autores como Arent-Bu [1], Kunstmann-Weis [4], Keyantuo-Lizama [3]. Nuestro caso es un poco más complicado por la presencia de la perturbación B. Si asumimos que B es relativamente acotado con respecto al operador A entonces obtenemos una caracterización de regularidad maximal, en el caso $L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$, en términos de $R-$acotamiento de

$$\{(I - \tilde{b}(ik)B - \tilde{a}(ik)A)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}. \tag{2}$$

En una segunda parte, tratamos el caso resonante: suponemos que existen $k_1, \dots, k_N \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\begin{cases} (i)\;\; ik_j \in \sigma(A,B) & \text{for } j = 1, \dots, N; \\ (ii)\;\; ik \notin \sigma(A,B) & \text{for } k \in \mathbb{Z}, k \neq k_1, \dots, k_N \\ (iii)\;\; ik_j & \text{is a simple pole of } F(\cdot) \text{ for } j = 1, \dots, N \end{cases} \tag{3}$$

donde $F(\lambda) = (I - \tilde{a}(\lambda)A - \tilde{b}(\lambda)B)^{-1}$. Vamos a probar que la ecuación (1) tiene solución fuerte L^p-periodica si y sólo si f satisface una determinada condición de compatibilidad. También en este caso damos una representación de la fórmula de las soluciones lo cuál permite el estudio de su regularidad. Un caso similar es estudiado en [2] cuando A genera un semigrupo analítico.

2 Resultados Principales

Vamos a considerar el $R-$acotamiento con respecto a la perturbación. Para este propósito, tenemos la siguiente definición

Definición 1 *Sea $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal sobre un espacio de Banach X. Un operator $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ es llamado $A-$acotado si $D(A) \subset D(B)$ y existe una constante $c \geq 0\,,\, d \geq 0$ tal que*

$$||Bx|| \leq c||Ax|| + d||x|| \tag{4}$$

*Depto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile.
Casilla 307, Correo 2. Santiago, Chile. e–mail: `vpoblete@lauca.usach.cl`, `clizama@lauca.usach.cl`.

para todo $x \in D(A)$. *La* $A-$*cota de* B *es*

$$c_0(A) := inf\{\, c \geq 0 \ : \quad existe\ d > 0\ tal\ que\ \ (4)\ vale\,\}.$$

El siguiente teorema es fundamental para estudiar la regularidad maximal del problema (1).

Teorema 1 *Sea* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión 1-regular y* $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *una sucesión acotada que verifica*

$$\{k(b_{k+1} - b_k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \qquad es\ acotada.$$

Sean A *y* B *operadores lineales cerrados definidos sobre un espacio* UMD X. *Supongamos que* B *es* $A-$*acotado. Si* $1 \in \rho(a_kA + b_kB)$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$, *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) $\{(I - a_kA - b_kB)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es un* $L^p_{X,[D(A)]}-$ *multiplicador,* $1 < p < \infty$.

(ii) $\{(I - a_kA - b_kB)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{B}(X, [D(A)])$ *es R-acotado.*

Se define

$$\rho(A,B) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ :\ I - \tilde{a}(\lambda)A - \tilde{b}(\lambda)B \text{ es invertible y } (I - \tilde{a}(\lambda)A - \tilde{b}(\lambda)B)^{-1} \in \mathcal{B}(X,[D(A)])\,\}$$

donde $\tilde{a}(\lambda)$, $\tilde{b}(\lambda)$ son las transformadas de Laplace de a and b. Vamos a asumir que $\tilde{a}(ik), \tilde{b}(ik)$ existen para todo $k \in \mathbb{Z}$ y que $\lambda \to \tilde{a}(\lambda)$ (resp. $\tilde{b}(\lambda)$) admiten una extensión analítica al sector que contiene el eje imaginario, denotamos esta extensión por $\tilde{a}$ (resp. $\tilde{b}$). Se define el conjunto $\sigma(A,B)$ por $\mathbb{C} \setminus \rho(A,B)$.

Definición 2 *Sea* $1 < p < \infty$. *Una función* u *es llamada una solución* L^p-*fuerte de (1) si* $u \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}; [D(A)])$ *y la ecuación (1) vale para casi todo* $t \in [0, 2\pi]$.

El siguiente teorema establece existencia y unicidad de solución para el problema (1) en el caso no resonante.

Teorema 2 *Sean* $a, b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *funciones tal que las transformadas de Laplace* $\tilde{a}(ik)$ *y* $\tilde{b}(ik)$ *son sucesiones 1-regular. Sean* A *y* B *operadores lineales cerrados definidos en un espacio* UMD X *y supongamos que* B *es* $A-$*acotado. Si* $\{ik\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \rho(A,B)$ *y* $\{(I - \tilde{a}(ik)A - \tilde{b}(ik)B)^{-1}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathcal{B}(X, [D(A)])$ *es R-acotado, entonces para todo* $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ *existe una única solución* L^p-*fuerte de* (1).

Consideremos ahora el caso resonante: Sea λ_0 un polo simple de F. Denotemos por Q el residuo de $F(\cdot)$ en λ_0, esto es,

$$Q = \lim_{\lambda\to\lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\, F(\lambda) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int_{B(\lambda_0,\varepsilon)} F(\lambda)\, d\lambda \tag{5}$$

donde $\varepsilon > 0$ y $B(\lambda_0, \varepsilon) := \{\lambda \in \mathbb{C} \ :\ |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon\,\}$. Se define

$$G(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)\, F(\lambda)\,, & 0 < |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \\ \\ Q\,, & \lambda = \lambda_0. \end{cases} \tag{6}$$

La siguiente proposición caracteriza el Ker del operador $(I - \tilde{a}(\lambda_0)A - \tilde{b}(\lambda_0)B)$ y nos da una solución de la ecuación

$$(I - \tilde{a}(\lambda_0)A - \tilde{b}B)\, x = y \tag{7}$$

Proposición 1 *Sea* λ_0 *un polo simple de* $F(\cdot)$ *y sea* $Q \in \mathcal{B}(X, [D(A)])$ *definido por* (5) *. Suponga que* B *es* A*-acotado. Entonces*

$$Ker(I - \tilde{a}(\lambda_0)A - \tilde{b}(\lambda_0)B) = Q(X). \tag{8}$$

Más aún, para todo $y \in X$ *tal que* $Qy = 0$ *, las soluciones de* (7) *están dadas por*

$$x = G'(\lambda_0)y - Q\,A(\tilde{a}'G)'(\lambda_0)y - Q\,B(\tilde{b}'G)'(\lambda_0)y \ . \tag{9}$$

El siguiente teorema nos da una condición de compatibilidad sobre f la cuál es necesaria y suficiente para la existencia de solución L^p-fuerte de (1).

Teorema 3 *Sean* $a, b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *funciones tal que las transformadas de Laplace* $\tilde{a}(ik)$ *and* $\tilde{b}(ik)$ *son sucesiones 1-regular y suponga que* (3) *vale. Sean* A *y* B *operadores lineales cerrados definidod en un espacio* UMD X *tal que* B *es* A*-acotado. Si* $\{M_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *definido por*

$$M_k = \begin{cases} (I - \tilde{a}(ik)A - \tilde{b}(ik)B)^{-1} & k \in \mathbb{Z} \setminus \{\, k_1, \ldots, k_N \,\} \\ \\ G_j'(ik_j) \, - Q_j\,A(\tilde{a}'G_j)'(ik_j) - Q_j\,B(\tilde{b}'G_j)'(ik_j) & j = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{10}$$

es $R-$*acotada entonces para todo* $f \in L^p_{2\pi}(\mathbb{R}, X)$ *la ecuación* (1) *tiene una solución* L^p-*fuerte si y sólo si* $Q_n\,\hat{f}(k_n) = 0$ *, para todo* $n = 1, \ldots, N$ *.*

En este caso, las soluciones de (1) *están dadas por*

$$\begin{aligned} u(t) = \lim_{n\to\infty} & \sum_{\substack{k\,=\,-n \\ k\,\neq\,k_1,\,\ldots,\,k_N}}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) e^{ikt}(I - \tilde{a}(ik)A - \tilde{b}(ik)B)^{-1}\,\hat{f}(k) \\ & + \sum_{j=1}^{N} e^{ik_jt}\,[G_j'(ik_j) \, - Q_j\,A(\tilde{a}'G_j)'(ik_j) - Q_j\,B(\tilde{b}'G_j)'(ik_j)]\,\hat{f}(k_j). \end{aligned} \tag{11}$$

Bibliografía

[1] W. Arendt, S. Bu. *The operator-valued Marcinkiewicz multiplier theorem and maximal regularity* . Math. Z. **240** (2002), 311-343.

[2] G. Da Prato, A. Lunardi. *Solvability on the real line of a class of linear Volterra integrodifferential equations of parabolic type.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 150 (1988), 67–117.

[3] V. Keyantuo, C. Lizama. *Maximal regularity for a class of integro-differential equations with infinite delay in Banach spaces.* Studia Math. (1) **168** (2005), 25-50.

[4] P. Kunstmann, L. Weis. *Maximal* L_p-*regularity for parabolic equations, Fourier multiplier theorems and Hoo-functional calculus.* In M. Iannelli, R. Nagel, S. Piazzera (eds.), "Functional Analytic Methods for Evolution Equations" Springer Lecture Notes Math. 1855, 65-311 (2004).

[5] J. Prüss. *Evolutionary Integral Equations and Applications.* Monographs Math., vol. **87**, Birkhäuser Verlag, 1993.

[6] A. Pugliese. *Some questions on the integrodifferential equation* $u' = AK * u + BM * u$. In A. Favini. E. Obrecht, and A. Venni, editors., Differential Equations in Banach Spaces, pages 227-242, Springer-Verlag, New York, 1986.