6 Teoría de Números

1. **Expositor:** Giancarlo Lucchini Arteche (partially supported by ANID via Fondecyt Regular 1210010) e-mail: `luco@uchile.cl`
Título: De 0-ciclos a K-teoría superior: principios de transferencia y la Conjetura II de Serre
Resumen: La Conjetura II de Serre estipula que si K es un cuerpo de dimensión cohomológica ≤ 2, G es un K-grupo semisimple y simplemente conexo y X es un G-espacio principal homogéneo, entonces X posee un K-punto. Esta conjetura ha sido probada para diversas familias de cuerpos, y alternativamente para diversas familias de grupos, pero aún está abierta en toda generalidad.

   Una forma de debilitar la conjetura es reemplazando "K-punto" por "0-ciclo de grado 1". Esto es equivalente a pedir que existan extensiones finitas L_i/K tales que X admite un L_i-punto para cada i y $\mathrm{mcd}([L_i : K]) = 1$. Existen de hecho casos (como el del grupo escindido de tipo E_8) donde esta versión más débil de la conjetura ya ha sido probada, mientras que la original sigue abierta.

   En esta charla, veremos cómo la propiedad de "poseer un 0-ciclo de grado 1" se puede interpretar en términos de ciertos grupos de normas en K-teoría algebraica. Esto nos permite definir propiedades válidas en grupos de K-teoría algebraica superior que serían análogas a ésta, pero esperables para cuerpos de dimensión cohomológica superior (y no sólo 2). Así, se puede enunciar versiones "superiores" de la Conjetura II de Serre, válidas para cuerpos de dimensión cohomológica arbitraria.

   Hecho esto, mostraremos cómo la existencia de un "principio de transferencia" nos permite deducir este tipo de propiedades para un cuerpo de dimensión cohomológica arbitraria si ya se conocen para otros cuerpos de dimensión cohomológica menor. Esto permite reducir la demostración de las versiones superiores de la conjetura a la original, pero sobre cuerpos *numerables*, lo que parece más al alcance de las técnicas de hoy en día.

   Trabajo en conjunto con:
Diego Izquierdo (`diego.izquierdo@polytechnique.edu`, CMLS, École polytechnique, Palaiseau, France.)

2. **Expositor:** Claudio Bravo (partially supported by Conicyt via Postdoctoral fellowship No 74220027), e-mail: `claudio.bravo.c@ug.uchile.cl`)
Título: Quotients of the Bruhat-Tits building by $\{\wp\}$-arithmetic subgroups
Resumen: Let $\mathbf{G}$ be a reductive Chevalley group scheme (defined over $\mathbb{Z}$). Let $\mathcal{C}$ be a smooth, projective, geometrically integral curve over a field $\mathbb{F}$. Let $\wp$ be a closed point on $\mathcal{C}$. Let A be the ring of functions that

are regular outside $\{\wp\}$. The fraction field k of A has a discrete valuation $\nu = \nu_\wp : k^\times \to \mathbb{Z}$ associated to $\wp$.

In this talk, we study the action of the group $\mathbf{G}(A)$ of A-points of $\mathbf{G}$ on the Bruhat-Tits building $\mathcal{X} = \mathcal{X}(\mathbf{G}, k, \nu_\wp)$ in order to describe the structure of the orbit space $\mathbf{G}(A)\backslash\mathcal{X}$. We obtain that this orbit space is the "gluing" of a closed connected CW-complex with some sector chambers. The latter are parametrized by a set depending on the Picard group of $\mathcal{C} \smallsetminus \{\wp\}$ and on the rank of $\mathbf{G}$. We deduce, from this description, a writing of $\mathbf{G}(A)$ as a free product with amalgamation. We also obtain a counting of the Γ-conjugacy classes of maximal unipotent subgroups contained in a finite index subgroup $\Gamma \subseteq \mathbf{G}(A)$, together with a description of these maximal unipotent subgroups. If time permits, we can finally discuss about the consequence of the preceding results on the homology of $\mathbf{G}(A)$.
Joint work with:
Benoit Loisel (partially supported by GeoLie project (ANR-15-CE40-0012, The French National Research Agency)),
e-mail: `benoit.loisel@math.univ-poitiers.fr`,
Départment de Mathématiques, Université de Poitiers, Poitiers, France.

References

[1] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local: I. Données radicielles valuées*, Publ. Math. IHÉS, **41** (1972).

[2] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local: II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. IHÉS, **60** (1984).

[3] G. Harder, *Die Kohomologie S-arithmetischer Gruppen uber Funktionenkorpen*, Inventiones Math., Goettingen, **42** (1977) 135-175.

[4] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[5] C. Soulé, *Chevalley groups over polynomial rings*, Homological group theory (Durham, 1977), edited by C.T.C. Wall, London Math. Soc. Lectures Note Ser., Cambridge Univ. Press, **36** (1979), 359-361.

3. **Expositor:** Milton Espinoza (parcialmente financiado por Proyecto Fondecyt Iniciación 11200482, e-mail: `milton.espinozae@userena.cl`)
Título: Puntos enteros en triángulos racionales y la cohomología de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$
Resumen: Sea $\mathcal{P}$ un polítopo convexo con vértices racionales en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathrm{G}(\mathcal{P}, m) := \#(\mathbb{Z}^n \cap m\mathcal{P})$ para todo $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En [1], Ehrhart mostró que $\mathrm{G}(\mathcal{P}, m)$ es un cuasi-polinomio en m, es decir, una suerte de polinomio en m, pero con coeficientes periódicos en esta variable en lugar de necesariamente constantes. Los coeficientes de $\mathrm{G}(\mathcal{P}, m)$ son misteriosos y ocurren

en distintas áreas de las matemáticas, incluyendo la teoría de números [2], por lo que su estudio se ha extendido hasta nuestro siglo.

En esta charla abordaremos un caso sencillo, pero interesante y para nada trivial, el cual invloucra a una familia de triángulos en el plano parametrizados por matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. De hecho, mostraremos que la contribución principal a $\mathrm{G}(\mathcal{P}, m)$, con $\mathcal{P}$ variando sobre estos triángulos, está controlada por un 1-cociclo del mencionado grupo de matrices.

References

[1] Eugène Ehrhart, *Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences Série A, **254** (1962), 616–618.

[2] David R. Hayes, *The Partial Zeta Functions of a Real Quadratic Number Field Evaluated at* $s = 0$, Number Theory: Proceedings of the First Conference of the Canadian Number Theory Association held at the Banff Center, Banff, Alberta, April 17–27, 1988, edited by Richard Mollin, Berlin, Boston: De Gruyter (2016), 207–226.

4. **Expositor:** Roberto Villaflor (partially supported by ANID Postdoctoral grant No 3210020, e-mail: `roberto.villaflor@mat.uc.cl`)
Título: A geometrization of index zero quasi-Jacobi forms
Resumen: In this talk I will explain how one can recover the algebra of (quasi-)Jacobi forms of index zero from a geometric point of view. This is done by determining their differential equations as unique vector fields on the moduli space of elliptic curves with two marked points and a marked frame of the relative De Rham cohomology bundle with boundary on these points, compatible with its mixed Hodge structure. This is a natural generalization of Movasati's description of the algebra of quasi-modular forms in terms of Ramanujan vector fields on the moduli of elliptic curves with a basis of its De Rham cohomology compatible with its Hodge structure.
Joint work with:
Jin Cao (e-mail: `caojin@mail.tsinghua.edu.cn`, Yau Mathematical Sciences Center, Tsinghua University, Beijing, China).
Hossein Movasati (e-mail: `hossein@impa.br`, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil).

References

[1] H. Movasati, *Quasi-modular forms attached to elliptic curves, I*, Ann. Math. Blaise Pascal, **19(2)** (2012) 307-377.

[2] H. Movasati, *Modular type functions attached to mirror quintic Calabi-Yau varieties*, Math. Z., **281(3)** (2015) 907-929.

[3] H. Movasati, *Modular and Automorphic forms and Beyond*, Monographs in Number Theory: Vol. 9, World Scientific (2021).

[4] J. Cao, H. Movasati and R. Villaflor Loyola, *Gauss-Manin connection in disguise: Quasi Jacobi forms of index zero*, arXiv preprint arXiv:2109.00587, 2021.

5. **Expositor:** Cristian Gonzalez-Aviles (parcialmente financiado por proyecto Fondecyt 1200118, email: `cgonzalez@userena.cl`)
Título: Sobre la estructura de los grupos algebraicos totalmente singulares
Resumen: Un conocido teorema de Claude Chevalley establece que todo grupo algebraico conexo y liso G sobre un cuerpo perfecto k es, de manera única, una extension de una variedad abeliana A por un grupo lineal L conexo y liso. Este resultado no es válido sobre un cuerpo imperfecto k (por ejemplo, cuando k es el cuerpo de funciones de una curva algebraica sobre un cuerpo finito). Todo lo que podemos decir es que L es conexo pero posiblemente no liso (es decir, el haz de estructura de $L_{\overline{k}}$ puede contener elementos nilpotentes no triviales o, dicho más brevemente, L es "singular"). De hecho, existen curvas proyectivas X que son regulares sobre k tales que $X_{\overline{k}}$ contiene puntos cuspidales. En tales casos, la variedad Jacobiana $G = \mathrm{Pic}^0_{X/k}$ de X es conexa y lisa pero en su descomposición "de Chevalley" $0 \to L \to G \to A \to 0$ el grupo lineal L es usualmente *totalmente singular*, es decir, su subgrupo liso maximal es 0. En esta charla enunciaré algunos resultados sobre la estructura de estos grupos algebraicos totalmente singulares y discutiré algunos ejemplos básicos en ciertas áreas de investigación en las cuales estos grupos son muy relevantes pero cuya importancia no ha sido reconocida aún (e.g., en la teoría de las formas cuadráticas cuasi-lineales en característica 2, la teoría de las p-formas diagonales en característica p, los grupos de Hironaka en la teoría de resolución de singularidades sobre cuerpos imperfectos, etc.